1. ФИО: Коровина Надежда Петровна

2. Точный адрес с индексом : 652427 Кемеровская область, г. Берёзовский, ул. Кирова 7, кв. 48.

3. Номер телефона: 8-908-941-14-24

4. Контактный Е-mail: shkolaodin@rambler.ru

5. Наименование тем: «Уравнение степеней»

6. Место работы: Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение «Средняя общеобразовательная школа № 1» г. Берёзовский

7. Ваш логин на ПроШколе: korovinaN.

 Уравнение высших степеней.

 В условиях модернизации образования становится особенно актуальным подготовка конкурентоспособного работника, способного решать задачи повышенного уровня. На уровне школы эта задача решается при подготовке учащихся к ЕГЭ. Одной из тем заданий повышенного уровня при сдаче ЕГЭ является решение уравнение высших степеней.

 Мной была собрана экспериментальная группа учащихся 9 классов (22 человека), которым было предложено изучать материал для углубленного изучения математики по следующим темам:

1.Теорема Безу.

2.Возвратные и обобщённо - возвратные уравнения 3-й и 4 –й степени.

3.Однородные уравнения.

4.Уравнения, содержащие модуль.

 Для активизации познавательной активности учащихся мной даётся материал без доказательства: определения и формулировки теорем, тогда как на обычных уроках алгебры учащимися решается уравнение введением замены.

 Рассмотрим способы решения уравнений.

1. **Теорема Безу:**

Для того, чтобы многочлен делился без остатка на двучлен *х-а*, необходимо и достаточно, чтобы число *а* было корнем этого многочлена.

(*Р(х) — (х — а) • Р1(х), P1(x)* - многочлен степень которого на 1 ниже степени многочлена *Р(х*).)

1. **Теорема: о целых корнях**

Если уравнение *а0хп + а1хп-1 + а2хп-2 + …+  ап-1х + ап,* имеет целые коэффициенты, причем свободный член уравнения *ап≠0*, то целыми корнями такого уравнения могут быть только делители свободного члена.

**Пример 1. *(x-2)(x-3)(x-4) = 6***

Решение

Пусть *х – 2= t*, то *x – 3 = t – 1*; *x – 4 = t – 2*.

И уравнение принимает вид *t(t – l)(t – 2) = 6;*

*t(t2 – 3t + 2) = 6*;

*t3 – 3t2 + 2t – 6 = 0*;

*t2(t – 3) + 2(t – 3) = 0;*

*(t - 3)(t2 + 2) = 0*

Т.к. *t2 + 2 ≠ 0* при *t* – любом, то

*t – 3 = 0; t = 3.*

Согласно замены получаем *x — 2 = 3;*

*х = 5.*

**Ответ: 5.**

Если бы не было подсказки способа решения, то конечно перемножали бы три многочлена в левой части, и получилось бы уравнение: *х3 – 9х2 + 26х – 3 0 = 0*, которое группировкой трудно решить.

Но способ решения есть.

±1; ±2; ±3; ±5; ±6; ±10; ±30.

3 27-81+78-30≠0, то 3 – не является корнем.

5 125-225+130-30=0 – верно, то 5 – корень.

*х3 – 9х2 + 26х – 30 = 0 х – 5*

*х3 – 5х2 х2 – 4х + 6*

 *-4х2 + 26*

 *-4х2 + 20*

*6х – 30 х2 – 4х + 6 = 0*

*6х – 30* *D1 = 4 – 6 = – 2*

 0 Ø

**Ответ: 5.**

 **Пример 2. *3х4 – 2x3 – 8х2 – х + 2 = 0***

Решение

±1; ±2.

 1 3 – 2 – 8 – 1 + 2 = 0 – неверно, то 1 - не корень;

-1 3 + 2 – 8 + 1 + 2 = 0 – верно, то -1 - корень;

 2 48 – 16 – 32 – 2 + 2 = 0 – верно, то 2 – корень.

Следовательно, на *(х + 1)(х – 2) = х2 – х – 2* делим многочлен, записанный в левой части данного уравнения:

*3х4 – 2x3 – 8x2 – х + 2 х2 – х – 2*

*3х4 – 3x3 – 6x2 3х2 + х – 1*

*х3 – 2x2 – х + 2*

 *х3 – х2 – 2х 3х2 + х – 1= 0*

 *-х2 + х + 2 D = 1 + 12 = 13*

 *-х2 + х + 2 х3,4=*$\frac{-1\pm \sqrt{13}}{6}$

 *0*

**Ответ: -1;** $\frac{-1-\sqrt{13}}{6}$**;** $\frac{-1+\sqrt{13}}{6}$**; 2.**

**Пример 3. *х3 – 6х2+9х – 4 = 0***

Решение

±1;±2;±4.

1 1- 6 + 9 – 4 = 0 – верно, то 1 – корень данного уравнения

 *х3 – 6х2 + 9х – 4 = 0 х – 1*

 *х3 – х2 х2 – 5х + 4*

 *-5х2 + 9х – 4*

 *-5х2 + 9х х2 – 5х + 4 = 0*

 *4х – 4 D = 25 - 16 = 9*

 *4х – 4 х1,2 =* $\frac{5\pm 3}{2}$*; х1 = 1; х2 = 4*

 *0*

Ответ: 1; 4

**Определение:** Алгебраическое уравнение вида *а0хп + а1хп-1 + а2хп-2 + …+  ап-1х + ап* =0

называется возвратным, если его коэффициенты, одинаково удаленные от начала и от конца, равны.

а) Возвратное уравнение 3-й степени: *ах3 + bх2 + bх + а = 0*

(например: *х3 – 2 х2 –* 2х + 1= 0). Такие уравнения решаются способом группировки.

б) Возвратное уравнение 4-й степени: *ах4 + bх3 + сх2 + bx + а = 0*

(например: *2х4 –* *3х3 + 5х2 – 3х + 2 = 0).* Так как, *х ≠ 0* (т.е. 0 не является корнем уравнения), то обе части уравнения делятся на *х2* и группируя «особым» образом слагаемые, вводя замену: $x+\frac{1}{x}=t$ и дальше решаем квадратное уравнение.

в) Бывают еще возвратные уравнения вида *ах4 + bх3 + сх2 +k ∙ bx + k2 ∙ а = 0,*которые называют обобщенно возвратными. Здесь также *х ≠ 0,* выделяют число *k*и вводят замену $x+\frac{k}{x}=y$ идальше решаем квадратное уравнение.

**Пример 4. *х4 – 5х3 + 6х2 – 5х + 1 = 0***

Решение

Это возвратное уравнение 4-й степени.

*х≠0,* т.к. получится 1=0, что неверно.

Делим обе части уравнения на *х*2

$$\left(x^{2}+\frac{1}{x^{2}}\right)-5\left(x+\frac{1}{x}\right)+6$$

Обозначим $x+\frac{1}{x}=z$, то $x^{2}+2∙x∙\frac{1}{x}+\frac{1}{x^{2}}=z^{2}$

 *х2+ 1= z2 – 2;*

и получаем уравнение

z2 – 2 - 5z + 6 = 0;

z2 – 5z + 4 = 0;

9;

*z1,2 =* $\frac{5\pm 3}{2}$*; z1 = 1; z2=4.*

Согласно замены получаем:

$x+\frac{1}{x}=1$*;* $x+\frac{1}{x}=4$*;*

*х≠0 х≠0*

*x2 – x + 1 = 0; x2 – 4x + 1 = 0;*

D = 1 – 4 = – 3<0. D = 4 – 1 = 3<0.

х1,2=$2\pm \sqrt{3}$.

**Ответ:**$ 2\pm \sqrt{3}$**.**

**Пример 5.**  ***3х4 - 2x3 – 31х2 + 10x + 75 = 0.***

Решение

*3х4 – 2х3 – 31х2 + (-5) ∙ (-2) ∙ х + 3∙ (-5)2 = 0.*

Это обобщенное возвратное уравнение, в котором х ≠ 0, то разделив обе части на *х2,* получим:

$3\left(x^{2}+\frac{\left(-5\right)^{2}}{x^{2}}\right)-2\left(x+\frac{-5}{x}\right)-31=0$.

Обозначим $x+\frac{-5}{x}=t$, то $x^{2}+2x$*∙*$\left(\frac{-5}{x}\right)$*+*$\left(\frac{-5}{x}\right)$*2=*$t^{2}$

 $x^{2}+\left(\frac{-5}{x}\right)$2=$t^{2}+10$.

И получаем:*3(t2+10) – 2t – 31=0;*

 *3t2+30 – 2t – 31=0;*

*3t2 – 2t – 1=0;*

D = 1+3 = 4; *t*1,2*=* $\frac{1\pm 2}{3}$

*t1=*$-\frac{1}{3}$*; t2=1.*

Согласно замены получаем:

*х –* $\frac{1}{x}$*=*$-\frac{1}{3}$*; х –* $\frac{5}{x}$*=*$1$*;*

*х ≠ 0. х ≠ 0.*

*3х2 + х – 15=0; х2 – х – 5=0;*

D = 1+180 = 181; D = 1 – 4*∙*1*∙*(– 5) = 21*∙*;

*х1,2=*$\frac{-1\pm \sqrt{181}}{6}$.*х3,4=*$\frac{1\pm \sqrt{21}}{2}$

**Ответ:**$ \frac{-1\pm \sqrt{181}}{6}$; $\frac{1\pm \sqrt{21}}{2}$.

**Пример 6. *х4 + 2x3 – 11х2 + 4х + 4 = 0.***

Решение

*х4 + 2x3 – 11х2 + 2*∙*х*∙2 *+1∙22 = 0*

Имеем обобщенное возвратное уравнение, в котором *х ≠ 0*, то разделив обе части уравнения на *х2*, получим:

$\left(x^{2}+\frac{2^{2}}{x^{2}}\right)+2\left(x+\frac{2}{x}\right)-11=0$. (\*)

Пусть $x+\frac{2}{x}$, то $x^{2}+2x∙\frac{2}{x}+\frac{4}{x^{2}}=z^{2}$;

 $x^{2}+\frac{4}{x^{2}}=z^{2}-4$.

И уравнение (\*) принимает вид:

*z2 – 4 + 2z – 11 =0;*

*z2 + 2z – 15 = 0;*

D1 = 1 +15 = 16.

*z1,2*=– 1 $\pm $ 4;

*z1=-5; z2=3.*

Согласно замены получаем:

$x+\frac{2}{x}=-5$; $x+\frac{2}{x}=3$;

*х ≠ 0; х ≠ 0;*

*х2+5х+2=0; х2 – 3х+2=0;*

D = 25 – 8 = 17. D = 9 – 8 = 1.

*х1,2=*$\frac{-5\pm \sqrt{17}}{2}$.*х3=1; х4=2.*

**Ответ:**$ \frac{-5\pm \sqrt{17}}{2}$; 1; 2.

**Определение:** Многочлен *Р(U; V)* степени *k* называется однородным, если степень каждого его члена равна одному и тому же числу *k.*

**Определение:** Уравнение вида *Р(U; V) = О* называется однородным уравнением степени *k* относительно *U* и *V,* если многочлен *Р(U; V)* - однородный многочлен степени *k.*

Например, однородное уравнение 3-й степени относительно *U* и *V* имеет вид:

*а0u3+a1u2v+a2uv2+a3v3=0*,

a однородное уравнение 4-й степени имеет вид:

*aou4 +* *a1u3v+* *a2u2v2 + a3uv3 + a4v4 =* 0.

Прием (способ) решения таких уравнений - делить на высшую степень одной из переменных (если эта переменная отлична от нуля) и обозначив $\frac{u}{v}$ = t получаем уравнение вида:

*aot3 +* *a1t2+* *a2t+ a3 =0* или *aot4 +* *a1t3+* *a2t2 + a3t + a4=* 0.

А последние уравнения можно решать или с помощью теоремы Безу или сведется дальнейшее решение к решению квадратного уравнения.

**Пример 7.** Однородные уравнения (все члены многочлена в левой части имеют одну и ту же степень) решаются путем деления обеих частей уравнения на высшую степень одной из переменных.

Например, решить уравнение:

*2(х2 +6х + 1)2 + 5(х2 + 6х + 1) (x2+1)+ 2(x2 + 1) = 0.*

Решение

Если обозначим (для простоты) *x2 + 6x + 1 = U,*a*x2+1 = V,*торешаемое уравнение запишется в виде: *2U2 + 5UV + 2V2 = 0*; : *V2*

Это однородное уравнение относительно переменных *U* и *V.* Делим обе части на *V2 (V2≠ 0*) и получаем

*2*$\left(\frac{U}{V}\right)$*2+* 5 $∙\frac{U}{V}$ + 2 = 0. Обозначим $\frac{U}{V}$ = t, тогда получим *2t2 +* 5*t*+2=0;

D = 25 – 16 = 9.

 *t*1,2*=* $\frac{-5\pm 3}{4}$*;*

 *t*1=– 2; *t*2=–$\frac{1}{2}$*.*

Согласно замены ($\frac{U}{V}$ = t*)* получим

$\frac{x^{2}+6x+1}{x^{2}+1}=-2$; $\frac{x^{2}+6x+1}{x^{2}+1}=–\frac{1}{2}$;

*х2+1≠ 0,* при *х* – любом. *х2+1≠ 0,* при *х* – любом.

*х2+6х+1=– 2(х2+1)*; 2*х2+12х+2=– х2 – 1*;

*3х2+6х+3=0; х2+4х+1=0.*

*х2+2х+1=0.* D1 = 4– 1 = 3.

*(х+1)2=0; х2,3=-*$2\pm \sqrt{3}$.

*х+1=0;*

*х1= – 1.*

**Ответ: *-***$2-\sqrt{3}$**; -1; *-***$2+\sqrt{3}$**.**

**Пример 8. (х + 5)4 – 13x2** $∙$ **(х + 5)2 + 36х4 = 0.**

Решение

Обозначим *х + 5* = *U*, a *x = V.* Число 0 не является корнем данного уравнения, т.е. получим 54 =0, что является неверным. После введения новых переменных *U* и *V* получается однородное уравнение относительно переменных *U* и *V* вида

*U4 -13U2V2 + 36 V 4* = 0; |: *V4*

*V ≠ 0,* т.к. *х ≠ 0* (это мы уже проверили).

 Введем замену $\frac{U}{V}$ = t, где t ≥0.

Получается: $\left(\frac{U}{V}\right)$4 – 13$\left(\frac{U}{V}\right)$2+36=0,

т.е. *t 4 – 13t2 + 36 = 0*. Обозначим *t2 = у*, где t≥0

*у2-13у + 36 = 0;*

D = 169 - 36 $∙$ 4 = 25;

*y1 = 4; y2 =9*. Согласно замены $\frac{U}{V}$ = t получаем

$\left(\frac{U}{V}\right)$2=9, $ \frac{U}{V}$=±3 и $\left(\frac{U}{V}\right)$2=4, $ \frac{U}{V}$=±2

Переходя к *х*, получаем совокупность 4-х уравнений:



**Ответ:** $–\frac{5}{3}$**;** $–\frac{5}{4}$**;**$ \frac{5}{2}$**; 5.**

**Пример 9. *2(х2 + х + 1)2 - 7(х – 1)2 = 13(х3 – 1).***

Решение.

*2(х2 + х + 1)2 – 13(х – l)(x2 + х + 1) – 7(x – 1)2 = 0.*

Обозначим *х2 + х + 1=U*, а *х – 1 = V.*

Для данного уравнения х=1 - не является корнем, т.к. 2$∙$32=0 – неверно.

2*U2* – *13UV* – 7 = 0; |: *V2 (V ≠ 0*)

2$\left(\frac{U}{V}\right)$2 – 13$∙\frac{U}{V} $– 7 = 0.

Пусть $\frac{U}{V}$ *= у* и тогда получаем:

2у2 – 13у – 7 = 0;

D = 169 + 56 = 225;

*y*1,2*=* $\frac{13\pm 15}{4}$*;*

*у1*$=–\frac{1}{2}$; *у2=7.*

Согласно замены получаем:

$\frac{x^{2}+x+1}{x-1}=-\frac{1}{2}$; $\frac{x^{2}+x+1}{x-1}=7$;

*х ≠ 1; х ≠ 1;*

*2х2+2х + 2 = – х + 1;**х2+х + 1 = 7х – 7;*

*2х2+3х + 1 = 0. х2  – 6х+8=0.*

D = 9– 8 = 1. D1 = 9– 8 = 4.

*х*1,2*=* $\frac{-3\pm 1}{4}$ *х3,4=3±1*

*х1=-1; х2=*$–\frac{1}{2}$*; х3=2; х4=4.*

**Ответ: -1;** $–\frac{1}{2}$**; 2; 4.**

**Пример 9. *х3 + 8 = 3х*** $∙$ ***х + 2***

Решение.

**I способ решения**

1. *х + 2 ≥ 0*; II. *х + 2 <0*

*х≥ - 2; х<- 2;*

*х3 + 8 = 3х* $∙$ *(х + 2); х3 + 8 = – 3х* $∙$ *(х + 2);*

*(х3 + 8) – 3х* $∙$ *(х + 2)=0; (х+2)*$ ∙$ *(х2 – 2х+4)+3х*$∙$*(х+2)=2*;

*(х+2)*$ ∙$ *(х2 – 2х+4 – 3х)=0; (х+2)*$ ∙$ *(х2 – 2х+4 +3х)=0;*

*х+2=0;* или *х2-5х+4=0; х+2=0;* или *х2+х+4=0;*

*х1=-2;* D = 25– 16 = 9; *х1=-2;* D = 1– 16 <0;

 *х*2,3*=* $\frac{5\pm 3}{2}$*;* не является корнем Ø

 *х2=1; х3=4.* на (-∞;-2)

**Ответ: -2; 1; 4.**

**II способ решения**

1. *х + 2 ≥ 0*; *х≥ - 2;*  II. *х + 2 <0; х<- 2;*

*х3 + 8 – 3х* $∙$ *(х + 2)=0; х3 + 8 = 3х* $∙$ *(- х – 2);*

*х3– 3х2 – 6х + 8=0; х3 + 8 = – 3х* $∙$ *(х + 2);*

±1; ±2; ±4; ±8  *х3+ 3х2 + 6х + 8=0;*

Но -4 и -8 не корни, т.к. эти числа ±1; ±2; ±4; ±8

не входят в (-2; +∞) Но ±1; ±2; 4 и 8 – не подходят

 1 1-3-6+8=0, 1 – корень уравнения -4 -64+48+24+8≠0, то -4 – не корень

-1 -1-3+6+8≠0, то -1 – не корень -8 -256+192+48+8≠0, то -8 – не корень

2 8-12-12+8≠0, то 2 – не корень

-2 -8-12+12+8=0, то 2 – корень уравнения

4 64-48-24+8=0, то 4 – корень уравнения.

Подбором нашли 3 решения данного уравнения 1;-2;4.

 **Ответ: -2; 1; 4.**

 Указанные выше способы решения являются эффективными и доступными: 48% учащихся из экспериментальной группы из 22 человек выполнили задания.

 Список литературы

1.Сборник задач для учащихся 8-9 классов. М.Г.Галицкий,А.М.Гольдман, Л.И.Звавич.-Просвещение.

2.Алгебра 8 класс.Учебник для классов с углубленным изучением математики. Н.Я.Виленкин.-Просвещение.

3.Алгебра 9 класс.Учебник для классов с углубленным изучением математики. Н.Я.Виленкин.- Просвещение.

4.Алгебра и математический анализ, 10класс.Учебник для классов с углубленным изучением математики. Н.Я.Виленкин –Просвещение.