**Тема: Уравнения, содержащие модули**

***Кожевникова Т.Б.***

 Модуль (абсолютная величина) действительного числа *x* обозначается символом │*x*│ и определяется равенством

│*x*│=$\left\{\begin{array}{c}x, если x\geq 0\\x, если x<0.\end{array}\right.$

**Основные свойства модуля**

 Для любых действительных *x* и y:

1. │*x*│*≥*0.
2. │$-$*x*│=│*x*│.
3. │*x2*│= *x2.*
4. $-$│*x*│≤ *x* ≤ │*x*│.
5. │*xy*│= │*x*│·│*y*│.
6. $\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{\left|x\right|}{\left|y\right|}$ , *y≠*0.

 При решении задач полезно помнить геометрический смысл модуля: │*x-a*│- это расстояние между точками *x* и *a*  числовой прямой. В частности, │*x*│- расстояние между точками *x* и 0. Из геометрического смысла модуля ясно, что │*x*│≤ *a* ⇔ *-a ≤ x ≤ a;*

│*x*│≥ *a ⇔* $\left[\begin{array}{c}x \geq a,\\x<-a,\end{array}\right.$$где a>0$

 При решении уравнений, содержащих неизвестную под знаком модуля, освобождаются от модульных символов, используя равенство

 │*f(x)*│= $\left\{\begin{array}{c}f\left(x\right),если f(x)\geq 0, \\-f\left(x\right), если f\left(x\right)<0.\end{array}\right. $

Рассмотрим решение некоторых типов уравнений с модулем.

1. Уравнение вида │*f(x)*│= *a,* где *a-const.*

Если *a < 0,* то решений нет;

если *a =* 0, то *f(x) =* 0;

если *a < 0,* то │*f(x)*│= *a ⇔*  $\left[\begin{array}{c}f\left(x\right)=a,\\f\left(x\right)=-a.\end{array}\right.$

***Пример 1.*** Решить уравнение │*2x – 3*│= 7.

*Решение.*  │*2x – 3*│= 7 ⇔ $\left[\begin{array}{c}2x – 3 =7\\2x – 3 = –7\end{array}\right.$ ⇔

⇔ $\left[\begin{array}{c}2x =10\\2x= –4\end{array}\right.$ ⇔ $\left[\begin{array}{c}x =5\\x= –2\end{array}\right.$

 Ответ: *x1 = 5; x2 = –2.*

*Замечание:* Уравнения вида │*f(x)*│= *a,* где  *a >* 0, можно свести к равносильному уравнению *f 2(x)= a2* ;

1. Уравнения вида │*f(x)*│= │*g(x)*│. Это уравнение можно решать двумя способами:
2. │*f(x)*│= │*g(x)*│ ⇔ *f 2(x) = g 2(x);*

1. │*f(x)*│= │*g(x)*│⇔ $\left[\begin{array}{c} f\left(x\right)= g\left(x\right)\\ f(x) = ˗ g(x).\end{array}\right.$

 ***Пример 2.*** Решить уравнение │*2x – 8*│= │*x* ˗ *13*│.

  *Решение 1.* │*2x – 8*│= │*x* ˗ *13*│ ⇔ *(2x ˗ 8)2 = (x ˗ 13)2* ⇔

 ⇔ *x2– 2x─35 = 0* ⇔ $\left[\begin{array}{c} x\_{1} = ─5\\x\_{2} = 7.\end{array}\right.$

 *Решение 2.*  │*2x – 8*│= │*x* ˗13│ ⇔ $\left[\begin{array}{c}2x ˗ 8 = x ˗ 13 \\2x ˗ 8 = 13 ˗ x \\ \end{array}\right.$ ⇔

 ⇔ $\left[\begin{array}{c} x\_{1} = ─5\\x\_{2} = 7.\end{array}\right.$

 Ответ: *x1 =* ─*5; x2 = 7.*

1. Уравнение вида │*f(x)*│= *g(x)*.

│*f(x)*│= *g(x)* ⇔ $\left[\begin{array}{c}\left\{\begin{array}{c}f\left(x\right)= g\left(x\right)\\g\left(x\right)\geq 0,\end{array}\right. \\\left\{\begin{array}{c}f\left(x\right)= ─ g\left(x\right)\\g\left(x\right)\geq 0.\end{array}\right.\\ \end{array}\right.$

 ***Пример 3.*** Решить уравнение │*5x + 2*│= *4* ˗ *4x*.

 *Решение.* │*5x + 2*│= *4* ˗ *4x*.

 *5x + 2*= *4* ˗ *4x 9x = 2*

 *4* ˗ *4x ≥0 x ≤ 1*

 │*5x + 2*│= *4* ˗ *4x* ⇔ *5x + 2=4x ˗4* ⇔ *x = ─ 6* ⇔

 *4 ˗ 4x ≥0 x ≤ 1*

$\left\{\begin{array}{c}x=\frac{2}{9} \\x\leq 1\end{array}\right.$

⇔$\left\{\begin{array}{c}x=-6\\x\leq 1\end{array}\right.$ ⇔ *x1 =* $\frac{2}{9}$ *, x2 = ─ 6,*

 Ответ: *x1 =* $\frac{2}{9}$*; x2 = ─ 6.*

1. Уравнение вида │*f 1(x)*│± │*f 2(x)*│± │*f 3(x)*│± …±│*f n(x)*│=*g(x).*

Как правило, эти уравнения можно решать методом интервалов, суть которого состоит в следующем:

* 1. находят нули функций *f 1(x), f 2(x) … f n(x),* т.е. точки, которые обращают эти функции в нуль, тем самым числовая ось разбивается на промежутки, в каждом из которых выражения под знаком модуля сохраняют знак;
	2. снимают все модульные символы на каждом промежутке, получают уравнение без модулей;
	3. объединяя найденные решения, получают все решения исходного уравнения.

Заметим, что граничные точки промежутков можно относить к любому из полученных смежных промежутков, а метод интервалов можно применять и при *n = 1*, т.е. в случае уравнения вида │*f(x)*│= *g(x).*

***Пример 4.*** Решить уравнение │*1 ˗2x*│ + │*3x +2│+│x│= 5.*

*Решение.* Нули функций  *x1 = ˗2/3, x2 = 0, x3 = 0,5* разбивают числовую ось на промежутки (˗∞ , ˗2/3) , [˗2/3, 0), [0, 0,5),

 [0,5 ,+∞).

* 1. *x < ˗2/3: 1 ˗ 2x ˗ 3x ˗ 2 ˗ x =5 ⇒ x = -1 ∊ (˗∞, ˗2/3);*
	2. *˗2/3 ≤ x <0: 1˗ 2x + 3x +2 ˗ x = 5 ⇒ 3≠ 5 ⇒ x ∊ ∅ ;*
	3. *0≤ x < 0,5: 1 ˗ 2x + 3x + 2 +x = 5 ⇒ x = 1 ∉ [ 0, 0,5);*
	4. *x ≥ 0,5: ˗1 + 2x 3x +2 + x = 5 ⇒ x = 2/3 ∊ [0,5, +∞).*

 Ответ: *x1 = ˗1; x2 = 2/3.*

 Рассмотренные методы не исчерпывают всех возможных приемов, используемых для нахождения решений уравнений с модулем. Часто применяют метод подстановки, разложение на множители, графический метод и т.д. Иногда решение может быть получено более простым путем, связанным с каким-либо индивидуальным свойством уравнения.

 Разберем на примерах метод подстановки, который позволяет свести уравнение с модулем к более простому уравнению относительно новой неизвестной.

 ***Пример 5.***  Решить уравнение *x2+ 2│x│˗ 3 = 0.*

 *Решение.* Воспользуемся свойством │*x*│2 = *x2* и положим │*x│ = t, t ≥ 0.*

Тогда уравнение примет вид *t 2 +2t ˗3 = 0 ⇒ t1= ˗3*

 *t2 = 1.*

Т.о. │*x*│= 1 ⇔ *x = ± 1.*

Ответ: *x = ± 1.*

 ***Пример 6.***  Решить уравнение *x2+2x ˗ 3 = 3│x + 1│.*

 *Решение.* Положим *x + 1= t.* Получим уравнение *t2 ˗ 4 = 3│t│*  или

 *t2 ˗3│t│˗ 4 = 0.*

Если *t ≥ 0*, то уравнение примет вид  *t2 ˗3t ˗ 4 = 0 ⇒ t1 = 4.*

Если *t < 0*, то получим уравнение  *t2 +3t ˗ 4 = 0 ⇒ t2 = ˗4.*

Возвращаясь к исходной подстановке, получаем *x1 = 3; x2 = ˗5.*

***Задания 1.*** Решить уравнения.

1. *а)* *│2x ˗ 4│ = 3; б) │2x ˗ 5│ = 3x + 2;*
2. *а)* *│1 ˗ 2x│ = 6; б) │2x2 + x│ = 4 ˗ x.*
3. *а) │5x + 2│ = 8; б) │2x2 ˗ 3x│= 3x + 4.*
4. *а) │ 5 ˗ 4x│ = 3; б) │3x ˗ 7│= 2x + 1.*
5. *а) │3x*$-4│$*=5; б) │x2+3x˗4│=x2˗7x˗2.*
6. *а) │x2˗5x│=6; б) │*$\frac{x}{2}-\frac{5}{2}$*│=x ˗ 1.*
7. *а) │1˗x2│=3; б) │˗x +2│=2x+1.*
8. *а) │x2˗5x+3│=3; б) │3x ˗4│= ˗x+4.*
9. *а) │8x ˗x2│=12; б)* $\frac{7x+4}{5}-x=\frac{│3x-5│}{2}.$
10. *а) │7˗5x│=13; б) x2˗3x+2│x˗2│=0.*

***Задания 2.***

Решить уравнения.

1. а) │*2x˗4│=│5˗3x│; б) x2˗6│x│+5=0.*
2. *а) │x2˗ 4│=│x2˗12│; б) x2˗3│x│+2=0.*
3. *а) │2x2˗3│=│4˗3x2│; б) x2˗5│x│+4=0.*
4. *а) │4x˗5│˗│2˗x│=0; б) x2˗7│x│+12=0.*
5. *а) │x2+2│=│2x+5│; б) x2+│x│˗ 2=0.*
6. *а) │x˗1│˗2│x+2│=0; б) x2˗7│x│+10=0.*
7. *а) │2x˗5│=│x+2│; б) x2˗6│x│+8=0.*
8. *а) │2x˗1│=│x+3│; б) x2˗9│x│+18=0.*
9. *а) │x2 ˗1│=│x+5│; б) x2˗8│x│+12=0.*
10. *а) │2x+3│=│2x˗5│; б) x2˗10│x│+21=0.*

***Задания 3.***

Решить уравнения.

1. │*x ˗1│+│x˗2│=1.*
2. │*x ˗2│+│x˗3│+│2x ˗ 8│=9.*
3. │4*x ˗1│˗│2x˗3│+│x˗2│=0.*
4. │*x ˗1│+│x + 2│˗│x ˗ 3│=4.*
5. │*x ˗1│˗│x+2│˗│2x ˗ 5│=˗3.*
6. │*x +3│+│5˗2x│=2 ˗ 3x.*
7. │*4 ˗x│+│2x˗2│=5 ˗ 2x.*
8. │*x +2│˗│x˗3│˗│x ˗ 2│=3.*
9. │2*x ˗1│+│x+3│=0.*
10. │*x ˗2│+3x˗3=│x ˗ 5│+18.*